ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES 1

Un corrigé

Partie I

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge si, et seulement si, $2n > 1$ ou encore $n \geq 1$.

De même, l'application $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n}$ est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$ et $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n-2}}$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $2n-2 > 1$ ou encore $n \geq 2$.

(b) Pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n-1}} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \beta_{n-1} - \beta_n.$$

D'autre part,

$$\beta_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n-1}} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \beta_{n-1} - \alpha_n.$$

De plus, une intégration par parties donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} \\
&= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t(-n)2t}{(t^2+1)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= 0 + 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^3+1)^{n+1}}\mathrm{d}t \\
&= 2n\alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\beta_n = 2n(\beta_n - \beta_{n+1})$ et par conséquent $\beta_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\beta_n$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ \beta_n = \frac{1\times 3\times \ldots \times 2n-3}{2\times 4\times \ldots \times 2(n-1)}\beta_1$$

avec $\beta_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ \beta_n = \frac{1\times 3\times \ldots \times 2n-3}{2\times 4\times \ldots \times 2(n-1)}\frac{\pi}{2}.$$

Comme $\alpha_n = \beta_{n-1} - \beta_n$, on obtient alors :

$$\forall n \geq 2,\ \ \alpha_n = \frac{1\times 3\times \ldots \times 2n-5}{2\times 4\times \ldots \times 2(n-1)}\frac{\pi}{2}.$$

2. Par la formule de binôme on a $(1+t^2)^n = \sum_{i=0}^{n} \complement_n^i t^{2i} = 1 + nt^2 + \sum_{i=2}^{n} \complement_n^i t^{2i}$. Comme le terme $\sum_{i=2}^{n} \complement_n^i t^{2i}$ est positif, alors $(1+t^2)^n \geq 1 + nt^2$ et donc $0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2)} \stackrel{\leq}{} \dfrac{1}{1+nt^2}$ puis par intégration et changement de variable, on obtient :

$$0 \leq \beta_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+nt^2} \stackrel{u=\sqrt{n}t}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (\beta_{n-1} - \beta_n) = 0$.

3. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sum_{p=2}^{n} \alpha_p = \int_0^{+\infty} \sum_{p=2}^{n} \frac{t^2}{(t^2+1)^p} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{t^2+1}\right)^k \mathrm{d}t,$$

d'où, en reconnaissant une somme géométrique :

$$\sum_{p=2}^{n} \alpha_p = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{t^2+1}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{1}{t^2+1}\right)} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{t^3+1}\right)^{n-1}}{t^2+1} \mathrm{d}t$$

ou encore :

$$\sum_{p=2}^{n} \alpha_p = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \beta_n.$$

D'où, $\forall n \geq 2$, $\left| S_n - \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \right| \leq \beta_n$.

Mais on sait que $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$, alors l'inégalité précédente montre que la suite de la somme partielle associée à la série $\sum_{n\geq 2} \alpha_n$ converge, ce qui montre que série $\sum_{n\geq 2} \alpha_n$ converge et $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

D'autre part, on sait que $\alpha_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times 2n-5}{2 \times 4 \times ... \times 2(n-1)} \dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times 2n-5}{2 \times 4 \times ... \times 2(n-1)} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

puis, par un changement d'indice, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times ... \times 2n-3}{2 \times 4 \times ... \times 2n} = 1.$$

Partie II

1. La fonction h_1 est bien définie et continue sur $[0, 1[$. De plus, $\forall t \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{h_1(t) - h_1(0)}{t} &= \frac{1}{t(1-t^2)^r} - \frac{1}{t} \\
&= \frac{1 - (1-t^2)^r}{t(1-t^2)^r} \\
&= \frac{1 - \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \complement_r^i t^{2i}}{t(1-t^2)^r} \\
&= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \complement_r^i \frac{t^{2i-1}}{(1-t^2)^r}.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h_1(t)-h_1(0)}{t}$ existe et vaut 0 et par conséquent h_1 vérifie la propriété P.
De même, la fonction h_2 est bien définie et continue sur $[0,1[$. Montrons que h_2 est dérivable à droite en 0. Pour tout $t\in]0,1[$, on a :

$$\frac{h_2(t)-h_2(0)}{t}=\frac{\frac{(1-t)^r}{(2-t)^s}-\frac{1}{2^s}}{t}=\frac{(1-t)^r-\left(1-\frac{t}{2}\right)^s}{t(2-t)^s}.$$

On sait que $(1-t)^r=1-rt+t\varepsilon_1(t)$ et $\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^s=1-\dfrac{st}{2}+t\varepsilon_2(t)$ où $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_1(t)=\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_2(t)=0$. Donc

$$(1-t)^r-\left(1-\frac{t}{2}\right)^s=\left(\frac{s}{2}-r\right)t+t\varepsilon(t)$$

avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$. D'où,

$$\lim_{t\to 0}\frac{h_2(t)-h_2(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{s}{2}-r\right)+\varepsilon(t)}{(2-t)^s}=\frac{s}{2^{s+1}}-\frac{r}{2^s}.$$

Donc h_2 vérifie la propriété P.

2. (a) • Si $\lambda=1$, pour $x\in]0,a[$, on a :

$$|\triangle_a(x)|=x\left|\int_a^x\frac{H(t)}{t}\mathrm{d}t\right|\le x\int_x^a\sup_{t\in[0,a]}|H(t)|\frac{\mathrm{d}t}{t}=Ax\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=Ax\ln\left(\frac{a}{x}\right).$$

• Si $\lambda\neq 1$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}|\triangle_a(x)| &= x^\lambda\left|\int_a^x\frac{H(t)}{t^\lambda}\mathrm{d}t\right|\\ &\le x^\lambda\int_x^a\sup_{t\in[0,a]}|H(t)|\frac{\mathrm{d}t}{t^\lambda}\\ &\le Ax^\lambda\int_a^x\frac{\mathrm{d}t}{t^\lambda}\\ &\le Ax^\lambda\left[\frac{t^{-\lambda+1}}{1-\lambda}\right]_a^x=Ax^\lambda\frac{x^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}=\frac{A}{1-\lambda}\left(x-\frac{x^\lambda}{a^{\lambda-1}}\right)\end{aligned}$$

• Si $x\in]0,1[$, on a :

$$|\triangle(x)|=\left|\frac{1}{x^\lambda}\int_0^x t^\lambda H(t)\mathrm{d}t\right|\le\frac{A}{x^\lambda}\int_0^x t^\lambda\mathrm{d}t=\frac{Ax^{\lambda+1}}{\lambda+1}\le\frac{Ax}{\lambda+1}.$$

(b) • Pour tout λ de $\in\mathbb{R}_+^*$ et tout x de $\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}k_a(x)+\frac{h(0)}{\lambda} &= x^\lambda\int_a^x\frac{h(t)}{t^{\lambda+1}}\mathrm{d}t-x^\lambda\int_a^x\frac{h(0)}{t^{\lambda+1}}\mathrm{d}t+\frac{h(0)}{\lambda}\left(\frac{x}{a}\right)^\lambda\\ &= x^\lambda\int_a^x\frac{H(t)}{t^\lambda}\mathrm{d}t+\frac{h(0)}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\lambda\end{aligned}$$

D'où $\left|k_a(x)+\dfrac{h(0)}{\lambda}\right|\le|\triangle_a(x)|+\dfrac{|h(0)|}{\lambda}\left(\dfrac{x}{a}\right)^\lambda$, et comme $\lim\limits_{x\to 0}\triangle_a(x)=0$, alors

$$\lim_{x\to 0^+}k_a(x)=-\frac{h(0)}{\lambda}.$$

D'autre part, $k(x)-\dfrac{h(0)}{\lambda}=\dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x t^{\lambda-1}h(t)\mathrm{d}t-\dfrac{h(0)}{\lambda}$ avec $\dfrac{1}{x^\lambda}\displaystyle\int_0^x t^{\lambda-1}h(0)\mathrm{d}t=\dfrac{h(0)}{\lambda}$, d'où :

$$k(x)-\frac{h(0)}{\lambda}=\frac{1}{x^\lambda}\int_0^x t^\lambda\frac{h(t)-h(0)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{x^\lambda}\int_0^x t^\lambda H(t)\mathrm{d}t=\triangle(x),$$

et par conséquent $\lim_{x\to 0}\left(k(x)-\frac{h(0)}{\lambda}\right)=\lim_{x\to 0}\triangle(x)=0$, ainsi :

$$\lim_{x\to 0}k(x)=\frac{h(0)}{\lambda}.$$

3. (a) Pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$f(x)=(1-x^2)^{\alpha}\frac{1}{x^{\beta}}\int_0^x\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}=(1-x^2)^{\alpha}\frac{1}{x^{\beta}}\int_0^x t^{\beta-1}h_1(t)\mathrm{d}t$$

où h_1 la fonction définie dans la première question de cette partie avec $r=\alpha+1$. D'où, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0}f(x)=(1-0)^{\alpha}\times\frac{h_1(0)}{\beta}=\frac{1}{\beta}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1-x)^{\alpha}\int_{\frac12}^{x}\frac{t^{\beta-1}}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\
&\overset{y=1-x}{=} y^{\alpha}\int_{\frac12}^{1-y}\frac{t^{\beta-1}}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\\
&\overset{t=1-u}{=} -y^{\alpha}\int_{\frac12}^{y}\frac{(1-u)^{\beta-1}}{(1-(1-u)^2)^{\alpha+1}}\mathrm{d}u\\
&= -y^{\alpha}\int_{\frac12}^{y}\frac{(1-u)^{\beta-1}}{u^{\alpha+1}(2-u)^{\alpha+1}}\mathrm{d}u=y^{\alpha}\int_{\frac12}^{y}\frac{h_2(u)}{u^{\alpha+1}}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

où h_2 la fonction définie dans la première question de cette partie avec $r=\beta-1$ et $s=\alpha+1$. D'où, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0}g(x)=-\left(\frac{-h_2(0)}{\alpha}\right)=\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha}.$$

D'autre part, avec la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(1-x^2)^{\alpha}}{x^{\beta}}\left(\int_0^{\frac12}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}+\int_{\frac12}^{x}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\right)\\
&= \frac{(1-x^2)^{\alpha}}{x^{\beta}}\int_0^{\frac12}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}+\frac{(1-x^2)^{\alpha}}{x^{\beta}}\int_{\frac12}^{x}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\\
&= \frac{(1-x^2)^{\alpha}}{x^{\beta}}\int_0^{\frac12}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}+\frac{(1+x)^{\alpha}}{x^{\beta}}g(x)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(1-x^2)^{\alpha}}{x^{\beta}}\int_0^{\frac12}\frac{t^{\beta-1}\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\alpha+1}}+\frac{(1+x)^{\alpha}}{x^{\beta}}g(x)\right)=0+2^{\alpha}\times\frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha}=\frac{1}{2\alpha}.$$

Partie III

1. Il s'agit d'une série entière lacunaire, pour tout $x\neq 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}x^{2(n+1)}}{u_nx^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}x^{2(n+1)}}{u_nx^{2n}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a+n}{b+n}\right|=|x|^2.$$

Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_nx^{2n}$ est égal à 1.

2. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
x(1-x^2)\varphi'(x) + 2\left[(b-1) - ax^2\right]\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(x-x^3)2nu_n x^{2n-1} + 2\left[(b-1)-ax^2\right]\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2nu_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2nu_n x^{2n+2} + 2(b-1) + \sum_{n=1}^{\infty} 2(b-1)u_n x^{2n} \\
&\quad -2ax^2 - \sum_{n=1}^{\infty} 2au_n x^{2n+2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2nu_n x^{2n} - \sum_{k=2}^{\infty} 2(k-1)u_{k-1}x^{2k} + 2(b-1) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2(b-1)u_n x^{2n} - 2ax^2 - \sum_{k=2}^{\infty} 2au_{k-1}x^{2k} \\
&= 2b-1-2ax^2+2u_1x^2+2(b-1)u_1x^2 \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(2nu_n - 2(n-1))\,u_{n-1} + 2(b-1)u_n - 2au_{n-1}\right]x^{2n} \\
&= 2b-1+(2bu_1-2a)x^2 \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(2b-2+2n)u_n - (2a+2(n-1)u_{n-1})\right]x^{2n}
\end{aligned}$$

D'autre part, on peut vérifier facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(b+n-1)u_n - (a+n-1)u_{n-1} = 0$, on obtient donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad x(1-x^2)\varphi'(x) + 2\left[(b-1)-ax^2\right]\varphi(x) = 2(b-1) \tag{1}$$

3. (a) La solution de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (1) est donnée par :

$$x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{2\left[(b-1)-ax^2\right]}{x(1-x^2)}\mathrm{d}x}$$

où λ est une constante. Par la méthode de décomoosition en éléments simples, on obtient :

$$-\frac{2\left[(b-1)-ax^2\right]}{x(1-x^2)} = \frac{2(b-1)}{x} + \frac{b-1-a}{1-x} - \frac{b-1-a}{1+x},$$

ce qui donne pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\left[(b-1)-ax^2\right]}{x(1-x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{2(b-1)}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{b-1-a}{1-x}\mathrm{d}x + \int \frac{b-1-a}{1+x}\mathrm{d}x \\
&= \ln|x|^{2(b-1)} - (b-1-a)\ln(1-x) - (b-1-a)\ln(1+x) \\
&= \ln\frac{x^{2(b-1)}}{(1-x^2)^{b-1-a}}
\end{aligned}$$

et donc

$$y(x) = \lambda\frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}}.$$

La méthode de la variation de la constante conduit à $\lambda'(x)\dfrac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} = \dfrac{2(b-1)}{x(1-x^2)}$ ou encore

$$\lambda'(x) = 2(b-1)\frac{x^{2(b-1)-1}}{(1-x^2)^{b-a)}}$$

d'où

$$\lambda(x) = 2(b-1)\int \frac{x^{2(b-1)-1}}{(1-x^2)^{b-a}}\mathrm{d}x + \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (1) est de la forme

$$y : x \mapsto \lambda \frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} + 2(b-1)\frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} \int_0^x \frac{t^{2(b-1)-1}}{(1-t^2)^{b-a}}\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Puisque φ est solution de l'équation différentielle (1) et $\varphi(0)=1$ alors φ est de la forme précédente, donc nécessairement $\lambda = 0$ et $\varphi(x) = 2(b-1)\dfrac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} \displaystyle\int_0^x \frac{t^{2(b-1)-1}}{(1-t^2)^{b-a}}\mathrm{d}t$.

Or d'après la question (3) de la partie II, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} \int_0^x \frac{t^{2(b-1)-1}}{(1-t^2)^{b-a}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(b-1)}$ (utiliser la fonction f avec $\alpha = b-1-a$ et $\beta = 2(b-1)$). D'où,

$$\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[, \quad \varphi(x) = 2(b-1)\frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} \int_0^x \frac{t^{2(b-1)-1}}{(1-t^2)^{b-a}}\mathrm{d}t.$$

(b) D'après la question (3) de la partie II, on a :

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = 2(b-1) \lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)^{b-1-a}}{x^{2(b-1)}} \int_0^x \frac{t^{2(b-1)-1}}{(1-t^2)^{b-a}}\mathrm{d}t = \frac{2(b-1)}{2(b-a-1)} = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

4. Si $b=1$ et $a = \dfrac{-1}{2}$, l'équation différentielle (E) s'écrit $x(1-x^2)y'(x) + x^2y = 0$, dont la solution générale est $x \mapsto \lambda e^{-\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x} = \lambda e^{\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} = \lambda\sqrt{1-x^2}$. Comme $\varphi(0)=1$ alors $\lambda = 1$. Ainsi,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Si $|x| = 1$, c'est-à-dire $x^2 = 1$, on sait que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n x^{2n}$ converge pour $|x|=1$.

D'autre part, $\forall x \in [-1,1]$, on a $|u_n x^{2n}| \leq |u_n| = u_n$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n x^{2n}$ converge normalement et donc uniformément sur $[-1,1]$, en particulier la fonction somme φ est continue sur $[-1,1]$.

Partie IV

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur l'intervalle $[p,p+1]$ et donc $\forall t \in [p,p+1]$, $\dfrac{1}{(p+1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ puis par intégration on obtient :

$$\frac{1}{(p+1)^\alpha} \leq \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

2. La fonction μ est bien définie, continue et dérivable sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [1,+\infty[, \mu'(x) = \frac{b-a}{(x+b)^2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{x+b}\right)^{b-a-1}\right] \geq 0$$

donc μ est croissante sur $[1,+\infty[$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mu(x) = 0$, alors $\mu(x) < 0$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

3. (a) $\bullet$ Cas $\alpha = b-a$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a+n > n-1 \geq 0$ et $b+n \geq 0$. Donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n}{b+n} - \left(\frac{n+b-1}{n+b}\right)^{b-a} = \mu(n) < 0$$

(d'après la question **2.**, de cette partie), d'où :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{a+n}{b+n}\right| < \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Dans ce cas on aura $\left|\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right| \leq \dfrac{u_n}{v_n}$, ce qui donne l'inégalité $|u_n| \leq \dfrac{|u_1|}{v_1} v_n$ ou encore

$$|u_n| \leq \left|\frac{a}{b}\right| \times b^{\alpha} v_n = |a| b^{\alpha-1} v_n.$$

$\bullet$ Cas $\alpha = 1$: Si $\alpha = 1$, alors $b-a \leq 1$ et donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a+n}{b+n} - \frac{n+b-1}{n+b} = \frac{a+1-b}{n+b} \geq 0$$

Donc $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et dans ce cas on a :

$$|u_n| \geq \left|\frac{a}{b}\right| \times b v_n = |a| v_n.$$

(b) Si $b-a > 1$, $v_n = \dfrac{1}{(n+b-1)^{b-a}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{b-a}}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge, et par comparaison la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument, donc elle converge.

Si $b-a \leq 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge, elle est de même de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$.

4. (a) Soit $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x^{2n}-1) \\
&= \sum_{p=1}^{n} u_p(x^{2p}-1) + \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(x^{2p}-1) \\
&= \sum_{p=1}^{n} u_p(x^2-1)\sum_{i=0}^{p-1} x^{2i} + \sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(x^{2p}-1)
\end{aligned}$$

D'où :

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq (1-x^2)\sum_{p=1}^{n} |u_p| \sum_{i=0}^{p-1} |x|^{2i} + \sum_{p=n+1}^{\infty} |u_p|(1-x^{2p})$$

Comme $|x| \leq 1$, alors $\left|\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} |x|^{2i}\right| \leq p$ et $1-x^{2p} \leq 1$. D'où l'inégalité demandée :

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq (1-x^2)\sum_{p=1}^{n} p|u_p| + \sum_{p=n+1}^{\infty} |u_p|.$$

Il clair que $\sum_{p=1}^{n} p|u_p| \leq n \sum_{p=1}^{n} |u_p| \leq nS$. D'autre part, on a dans ce cas, $|u_p| \leq |a|b^{\alpha-1}\dfrac{1}{(p+b-1)^{\alpha}}$, donc par sommation et l'inégalité de la première question de cette partie :

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} |u_p| \leq |a|b^{\alpha-1} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{(p+b-1)^{\alpha}} \leq |a|b^{\alpha-1} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha}} \leq |a|b^{\alpha-1}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

D'où :

$$|\varphi(x) - \varphi(1)| \leq (1-x^2)nS + \frac{|a|b^{\alpha-1}}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} < n < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, alors $\dfrac{S}{2}\sqrt{1-x^2} < (1-x^2)nS < S\sqrt{1-x^2}$ et donc

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x^2)nS = 0.$$

De même, on a $\dfrac{1}{2^{\alpha-1}(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}} \leq n^{\alpha-1} \leq \dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}}$ et donc $(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \leq \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leq 2^{\alpha-1}(1-x^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}$.
Comme $\dfrac{\alpha-1}{2} = \dfrac{b-a-1}{2} > 0$, alors $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|a|b^{\alpha-1}}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = 0$ et par conséquent :

$$\lim_{|x| \to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$$

Si $a > 0$, alors $|u_n| = u_n$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$.

Si $-1 < a < 0$, alors $|u_n| = -u_n$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\varphi(1)$.

• • • • • • • • •